

XI CONGRESO INTERNACIONAL DE COSTOS Y GESTION

**XXXII CONGRESO ARGENTINO DE PROFESORES
UNIVERSITARIOS DE COSTOS**

**TEORIA DOS JOGOS APLICADA À DISTRIBUIÇÃO DE CUSTOS
CONJUNTOS**

Tipificación: Conclusiones o avances de proyectos de investigación

Autores

Nelson Hein

Universidade Regional de Blumenau - FURB
Professor do Programa de Pós-graduação em Ciências Contábeis
Doutor em Engenharia de Produção pela UFSC/SC

Adriana Kroenke

Universidade Regional de Blumenau - FURB
Mestranda em Ciências Contábeis

Thaís Mariane Biembengut

Universidade Regional de Blumenau - FURB
Mestre Engenharia de Produção pela UFSC/SC

Trelew – Patagonia Argentina, Septiembre de 2009

**XI CONGRESO INTERNACIONAL DE COSTOS Y GESTION
XXXII CONGRESO ARGENTINO DE PROFESORES
UNIVERSITARIOS DE COSTOS**

TEORIA DOS JOGOS APLICADA À DISTRIBUIÇÃO DE CUSTOS CONJUNTOS

Tipificación: Conclusiones o avances de proyectos de investigación

RESUMO

A Teoria dos Jogos pode ser utilizada como apoio à tomada de decisão quando as decisões a serem tomadas dependem também de outros indivíduos envolvidos no processo, sendo necessário considerar as possíveis decisões do grupo. Organizações empresariais realizam tarefas individuais e conjuntamente, necessitando distribuir seus custos igualmente de acordo com as atividades desenvolvidas. É possível inferir que os custos podem ser rateados facilmente nas atividades individuais, porém, quando são desenvolvidas conjuntamente de forma interdependente, a distribuição dos custos se torna mais complexa. Nesse sentido, o artigo que se apresenta objetiva a sistematização, apresentação dos conceitos fundamentais e utilização da Teoria dos Jogos aplicada à distribuição do custo conjunto, na forma de um sistema de informações interdependentes onde as atividades são realizadas em conjunto e não individualmente. Para tal, realiza-se a formalização matemática dos principais conceitos clássicos de solução de um jogo e, em seguida, é apresentado um exemplo que ilustra a aplicação da Teoria dos Jogos ao problema da distribuição de custo conjunto. Como produto da pesquisa conseguiu-se reunir sistematicamente o conjunto de conceitos de solução de jogos, dos quais se derivam todos os conceitos encontrados nas literaturas atuais. Apresentam-se os conceitos de solução para os chamados jogos cooperativos por meio do conceito de objeção e contra-objeção, de forma a mostrar que os mesmos podem ser vistos como um processo de negociação. Por último e não menos importante, apresenta-se os resultados e pontos de discussão para uma próxima investigação.

1 INTRODUÇÃO

A Teoria dos Jogos, que poderia chamar-se muito apropriadamente de teoria das decisões interdependentes, tem como objeto de análise situações nas quais o resultado da ação de indivíduos, grupos de indivíduos, ou instituições, depende substancialmente das ações dos outros envolvidos. Em outras palavras, trata de situações em que nenhum indivíduo pode convenientemente tomar decisão sem levar em conta as possíveis decisões dos outros.

O primeiro passo para o seu desenvolvimento foi dado por von Neumann, em 1928, com a demonstração do *teorema minimax*. Contudo, o autor só despertou a atenção do público em 1944, quando, em parceria com Morgenstern, propôs a análise do comportamento econômico via perspectiva do “jogo de estratégia”, criando assim a expectativa de reformulação da teoria econômica numa base totalmente nova, na qual o conceito de “processo competitivo” seria reestruturado em termos de mecanismos em que os agentes econômicos atuam estrategicamente (von NEUMANN; MORGENSTERN, 1972).

Nesse primeiro momento, as aplicações mais bem sucedidas se realizaram no campo da análise de mercados oligopolistas, no qual obtiveram resultados interessantes, embora ainda limitados pelos recursos matemáticos disponíveis.

Em 1950, John F. Nash demonstra o teorema minimax para grandes números de agentes. Em 1952, Lloyd Shapley apresenta o conceito de “núcleo”. Em 1959, Martin Shubik demonstra que a clássica “curva de contrato” de Edgeworth era idêntica ao conceito de solução desenvolvido por Shapley permitindo que a teoria neoclássica se livrasse de um dos seus principais problemas metodológicos. Naquele momento, enquanto a análise do problema do equilíbrio geral, conduzida principalmente por Anow, Debreu e McKenzie, era estritamente paramétrica, ao considerar os agentes econômicos como “tomadores de preços”, a Teoria dos Jogos, de posse de novos recursos técnicos, permitia analisar a questão da formação de preços como resultado de um amplo processo de barganha multilateral.

Nos anos de 1960 a popularidade da teoria entrou novamente em estado latente. Seu debate ficou restrito apenas a alguns pequenos grupos de pesquisadores desmotivados para publicar os resultados de suas pesquisas. Esse fenômeno já havia acontecido, nos anos 50, quando, por alguns anos, tomou-se praxe publicar apenas partes dos resultados das pesquisas realizadas. Os resultados foram muito pouco divulgados. Um exemplo importante foi o *Folk Theorem* que, devido a esse tipo de comportamento, ficou praticamente desconhecido por um período de tempo considerável.

A partir da segunda metade do anos sessenta, engenheiros e economistas começaram a perceber a Teoria dos Jogos como um instrumento de considerável alcance para uma velha questão que voltara a ganhar fôlego: a análise, projeto e implementação de mecanismos de alocação de recursos. O principal protagonista dessa questão foi Hurvitz (1973). Sua preocupação central voltava-se para a análise institucional, especialmente em economias descentralizadas em termos de informações.

Para tal propósito, envolveu-se na construção de mecanismos de alocação ou de planejamento que produzissem resultados “satisfatórios”. Como cada mecanismo de alocação de recursos contém implicitamente definido um jogo, abre-se assim um novo campo de pesquisa: a análise e projeto de mecanismos de alocação de recursos por meio das técnicas da Teoria dos Jogos.

A literatura concernente à teoria da escolha social também acabou constituindo uma fonte de pesquisa para a Teoria dos Jogos. Este campo de pesquisa teve origem quando Gibbard (1973) e Satherhwaite (1975), independentemente, resolveram indagar o que aconteceria se os agentes estudados por Arrow (1965) votassem estrategicamente ou de uma forma que não fosse isomórfica em relação às suas verdadeiras preferências.

A resposta encontrada foi, como era de se esperar, que as regras de votação usualmente utilizadas podem permitir escolhas sociais que não sejam “ótimos de Pareto”. A análise desta questão acabou gerando um campo de pesquisa (D'ASPREMONT, 1979) em que se procura desenvolver jogos que possam representar mecanismos de escolha, em que os agentes envolvidos são incentivados a votar estrategicamente.

Outro campo de pesquisa, também desenvolvido na década de setenta, diz respeito à distribuição de custo conjunto (MORENO, 1996). A Teoria dos Jogos tem-se dedicado de forma brilhante também a essa questão e tem-se destacado ao analisar e propor soluções para situações concretas e análogas às que serão apresentadas adiante.

Cabe ressaltar que a análise do equilíbrio geral desenvolvida pela Teoria Neoclássica tem sido quase completamente suplantada pela Teoria de Jogos não-cooperativos, principalmente a partir da segunda metade década de oitenta, quando a atenção de muitos pesquisadores tais como, por exemplo, Jacquemin (1987), Tirole (1988), Farrel e Maskin, (1989), Kreps (1990) e Fudenberg (1991), vem sendo dirigida para a modelagem de jogos dinâmicos, levando em conta a hipótese de informação imperfeita e de informação incompleta. A possibilidade da formação de coalizões entre firmas, tem-se mostrado maior em modelos dinâmicos que em modelos estáticos, oferecendo razoáveis subsídios para o estabelecimento de política antitruste (FIGUEIREDO, 1993).

Um jogo pode ser exposto matematicamente de diversas maneiras, isto é, de acordo com as propriedades que, dentre as que lhe são inerentes, deseja-se explorar. O objetivo aqui é dar-lhe a expressão mais geral possível sem deixar que escapem as suas propriedades mais essenciais.

A forma mais detalhada de se apresentar um jogo é a forma extensiva, a qual se refere à descrição concentrada no movimento seqüencial do jogo. Nessa forma as decisões são tomadas uma após a outra. O conceito de estratégia tomado como a descrição completa de como uma pessoa que participa de um jogo pode agir sob quaisquer circunstâncias, ou um curso de ação qualquer de um agente em um jogo na forma extensiva, nos permite definir e expressar o jogo em uma forma mais simples e objetiva, e por isso de maior importância teórica, chamada forma normal ou forma estratégica (HELLWIG, 1986). Podemos expressar um jogo na forma normal utilizando apenas as estratégias disponíveis para cada jogador e os respectivos resultados associados a cada elemento do conjunto constituído pelo produto cartesiano dos

conjuntos de estratégias individuais. Pode-se dizer ainda que um jogo está na forma normal quando toda a seqüência de decisões que devem ser tomadas enquanto ele se processa na forma extensiva pode ser reunida em uma única e particular decisão para o jogador: a escolha de uma estratégia. Todo jogo na forma extensiva pode ser expresso na forma normal (LUCE; RAIFFA, 1957, p. 59). Representa-se o jogo na forma extensiva só quando se faz necessário, para seu tratamento teórico, o conhecimento de certas propriedades que estão associadas ao movimento seqüencial do processo de tomada de decisão.

Muitas vezes o tratamento da questão em análise exige muito menos informações do que as apresentadas pela forma normal, necessitando apenas o conhecimento do conjunto de resultados que cada jogador ou coligação de jogadores pode garantir, segundo Green (1984, p. 96) “para si próprios, agindo como equipe, independentemente da ação contrária que o restante dos jogadores possa exercer”. Quando se representa o jogo fazendo uso apenas dessas informações diz-se que ele está na forma de função característica.

Um jogo também pode diferenciar-se de acordo com o conjunto de informações que os jogadores detêm. Um jogo é de informação completa ou de informação incompleta segundo o conhecimento que jogador tiver, no tocante às seguintes informações: (a) o conjunto de jogadores; (b) as estratégias disponíveis para cada jogador; e (c) todos os possíveis resultados para todos os jogadores. Um jogo é de informação completa quando cada jogador conhece (a), (b) e (c) e é de informação incompleta quando um ou mais jogadores desconhecem alguma das informações citadas. Em relação aos lances ou movimentos, um jogo pode ser de informação perfeita ou de informação imperfeita. Um jogo é de informação perfeita se a cada movimento todos os jogadores conhecem as escolhas feitas nos movimentos anteriores. Caso esta condição não se verifique, o jogo é de informação imperfeita.

Dentre as diversas situações que podem ser caracterizadas como jogo, pode-se identificar dois tipos fundamentais: (1) o jogo não-cooperativo, aquele cujas condições orgânicas não permitem a formação de coalizões que possam determinar o seu resultado, e (2) o jogo cooperativo, aquele cujas condições orgânicas facultam aos participantes a possibilidade de atuarem mediante a formação de coalizões.

2 JOGOS NÃO-COOPERATIVOS

Para caracterizar o que se entende por conceito de solução para um jogo não-cooperativo será suposto uma situação dada por: (1) a existência de um conjunto de agentes, com n jogadores, $I = \{1, \dots, n\}$; uma família de conjuntos de estratégias $(S_i)_{i \in I}$, na qual cada conjunto S_i representa todas as estratégias s_k disponíveis para cada jogador i , ($i \in I$); (3) uma família de funções $(P_i)_{i \in I}$, de valor real, na qual cada uma define um resultado ou *payoff* $P_i(s)$, para cada jogador, em função das decisões tomadas por todos jogadores, ou em função do vetor que contém as estratégias adotadas por cada jogador, $s = (s_1, \dots, s_i, \dots, s_n)$ onde, por sua vez, o número real $P_i(s)$ pode ser visto como utilidade do resultado do jogo para o indivíduo i , quando todos escolheram suas estratégias, definindo assim o vetor s .

Na situação descrita acima, cada do indivíduo deve escolher a sua estratégia s_k , supondo um certo comportamento dos outros participantes do jogo na escolha de suas respectivas estratégias, de forma a maximizar o seu ganho, ou a sua função utilidade; em outras palavras, tirar o máximo proveito do jogo. Matematicamente, se representa por $s \setminus s_k$ a n-upla de estratégias onde a i-ésima componente do vetor S que foi substituída por s'_k . Assim define-se a solução do problema do jogador individual como s_k tal que:

$$(1) P_i(s \setminus s_k) \geq P_i(s^* \setminus s_k) \text{ para todo } s_k \in S_i \text{ e } i \in I.$$

A questão para o analista, aqui, é indicar sob que condições o jogo terá solução. Concebendo solução como uma situação na qual, dadas as decisões, nenhum agente tem qualquer estímulo para alterá-la. Pode-se dizer que, matematicamente, existirá solução se existir uma combinação de estratégias s para a qual.

$$(2) P_i(s^*) \geq P_i(s^* \setminus s_k) \text{ para todo } s_k \in S_i \text{ e } i \in I.$$

A n-upla de estratégias s representa o equilíbrio de um jogo não-cooperativo ou ponto de equilíbrio de Nash. Esse conceito de solução implica que nenhum participante se beneficia mudando sua estratégia em s , quando todos os demais mantêm as suas (NASH, 1951). Em outras palavras: no equilíbrio, nenhum agente tem estímulo para alterar unilateralmente a sua estratégia.

Para conceituar precisamente de um conceito de solução para um jogo não-cooperativo de n-pessoas, convém ainda distinguir os jogos finitos dos jogos infinitos. Jogos finitos são aqueles em que cada participante se depara com um conjunto finito de escolhas, ou seja, escolhe sua estratégia dentro de um conjunto finito de possibilidades. No jogo infinito o conjunto de possibilidades no qual cada participante faz sua escolha é infinito.

Solução para um jogo infinito: o teorema de Nikaido e Isoda demonstra (SCHOTTER; SCHWÖDIAUER, 1980) que, dado um jogo na forma normal, se o conjunto de estratégias dos jogadores consiste de subconjuntos convexos e compactos de espaços Euclidianos, $S_i \subset \mathfrak{R}^{m_i}$, e suas funções de resultados, P_i , forem contínuas e côncavas em S_i , existirá sempre um ponto de equilíbrio na forma em que foi definido por Nash, que, no entanto, não será sempre necessariamente único.

Solução para um jogo finito: neste caso, sob o domínio de estratégias puras, ou seja sob o domínio de estratégias na forma até aqui definida, não é possível estabelecer condições gerais sob as quais um jogo não-cooperativo de n-pessoas tenha sempre solução. Todavia, o teorema principal de Nash (1951) mostra que sob o domínio de estratégias mistas, estratégias puras associadas a uma distribuição de probabilidade, todo jogo finito tem no mínimo um ponto de equilíbrio. Convém acrescentar que, como no caso do teorema aplicado aos jogos infinitos, o teorema que sustenta a solução para os jogos finitos, além de não garantir a unicidade, também não garante a propriedade de equivalência e *interchangeability* quando o problema apresenta mais de uma solução.

Portanto, sob a condição de impossibilidade de os agentes estabelecerem coalizões, nem mesmo para o caso mais simples - que é o jogo de duas pessoas, do tipo soma-zero se pode garantir sempre a existência de pontos de equilíbrio com estratégias puras (HEIN, 2004a). Nesse caso, quando esses pontos existem, não são necessariamente únicos. No entanto, adotando-se o conceito de estratégias mistas, é possível construir uma teoria geral para os jogos de duas pessoas, do tipo soma-zero. O fundamento dessa generalização foi fornecido por von Neumann mediante o teorema minimax, segundo o qual, sob o domínio de estratégias mistas, todo jogo de duas pessoas, do tipo soma-zero, tem no mínimo um ponto de equilíbrio e, quando possui vários, eles são equivalentes e as respectivas estratégias de equilíbrio são intercambiáveis. Nesse caso as estratégias mistas que reproduzem a solução de Nash podem ser determinadas pela solução de um problema de programação linear, formalizado a partir dos parâmetros fornecidos pelo respectivo jogo.

3 JOGOS COOPERATIVOS

Os jogos chamados cooperativos constituem uma classe determinada de jogos e se diferenciam dos jogos não-cooperativos principalmente pelo fato de que, ao contrário dos jogos não-cooperativos, possuem, como já afirmamos anteriormente, em sua estrutura interna, condições que facultam aos agentes a possibilidade de formarem coalizões entre si, com vistas a garantir um determinado resultado. Por uma coalizão entendemos qualquer subconjunto do conjunto de jogadores, I , constituído de jogadores que resolvem agir como uma equipe no processo de escolha de estratégias.

A análise do jogo cooperativo dispensa a utilização do jogo na forma normal, pois necessita apenas dos resultados ou ganhos que os jogadores ou as coalizões podem garantir para si. Essas informações estão contidas na função característica.

A função característica, V , é definida como a relação que associa a cada coalizão $K \subset I$, ($K \neq \emptyset$), o conjunto de todos os vetores-resultados ou vetores de ganhos, $V(K) \subset \mathbb{R}^k$ (espaço Euclidiano de dimensão k , em que k é o número de elementos da coalizão K) que a coalizão K pode garantir. Na verdade, dado o nosso propósito, não precisamos, como veremos adiante, utilizar ou conhecer extensivamente a função característica. Para efeito de clareza e simplicidade será suposto que a função de resultados que representa os ganhos individuais de cada participante do jogo seja "transferível". Admitir que a função de resultados é transferível significa que o ganho total alcançado por uma coalizão pode livremente ser dividido entre seus membros, da forma que melhor lhes convier. Pode-se assim admitir a existência de pagamentos à parte, ou seja, admitir a possibilidade de redistribuição dos ganhos fora do jogo propriamente dito. E, para tanto, basta que a função de resultados seja transferível, isto é, basta que o valor do resultado seja mantido quando redistribuído.

Na análise da Teoria dos Jogos, sob a hipótese de que as funções de resultados sejam transferíveis, não existe perda conceitual. Todos os conceitos de solução para jogos cooperativos independem da hipótese de que as funções de resultados sejam transferíveis ou não (SHUBIK, 1987, p. 369).

O uso da hipótese de transferência de utilidade é uma forma de simplificar o estudo dos jogos cooperativos, sem perda dos aspectos relevantes do jogo, como mostram Luce & Raiffa (1957) e Friedman (1977). Essa propriedade nos permite trabalhar com o valor máximo alcançável pela soma de utilidades dos participantes de uma coalizão K . Dessa forma, a função característica será representada por um único valor $v(K)$, sem se preocupar com outros possíveis valores que ela poderia alcançar. Interessa, com efeito, apenas o valor máximo que a coalizão pode conseguir (HEIN, 2004b), o qual será redistribuído mediante pagamentos feitos à parte.

Redefinindo a função característica de um jogo de n -pessoas, como: um valor real definido nos subconjuntos de I , que atribui a cada K o máximo valor (para K) do “jogo de duas pessoas” realizado entre K e $I-K$, supondo que essas duas coalizões se formem. Portanto, daqui por diante, $v(K)$ representa o máximo valor que os membros de K podem obter do jogo, independente do que o restante dos participantes possa fazer. Do que, por razões óbvias, segue que:

$$(3) v(\phi) = 0$$

e ainda: se K e L são duas coalizões disjuntas, só unirão suas forças, logicamente, se conseguirem no mínimo o que poderiam ganhar se agissem separadamente. Logo, a função característica $v(K)$, deve obedecer a uma condição chamada superaditividade, isto é:

$$(4) v(K \cup L) \geq v(K) + v(L) \text{ se } K \cap L = \phi$$

O conceito de função característica é de crucial importância para a análise de solução para os jogos cooperativos. Essa categoria de jogo, ao contrário da dos jogos não-cooperativos, fornece um espaço extenso e propício para uma gama de diferentes conceitos de solução. Por essa razão apresentaremos apenas aqueles jogos considerados mais importantes pela literatura especializada no assunto.

Dada a propriedade de superaditividade da função característica v , é razoável supor que a grande coalizão, ou seja, a coalizão de todos elementos do conjunto I , se formará. Dessa forma, portanto, a questão que resta será: como o valor de $v(I)$ se distribuirá entre os participantes, de maneira que essa distribuição seja estável. Para analisar essa questão define-se uma imputação ou uma alocação como sendo uma redistribuição exaustiva do valor da grande coalizão, que atribui ou distribui para cada jogador no mínimo a quantidade que ele garantiria para si, se não entrasse para a grande coalizão.

Representando por $x \in \mathfrak{R}^n$ o vetor de resultados e

$$(5) x(k) = \sum_{i \in k} x_i$$

como o somatório de todos os componentes de x , será uma imputação se obedecer às seguintes condições:

$$(6) x_i \geq v(\{i\}) \text{ para todo } i \in I, \text{ e}$$

$$(7) x(I) = V(I)$$

Se chamarmos de $X(v) \subset \Re$ o conjunto de todas imputações de um dado jogo expresso na forma de função característica, uma solução pode ser definida como um subconjunto de $X(v)$ consistindo das imputações que não forem eliminadas pelo conjunto de “filtros”, ou restrições, que vamos expor logo adiante. O conjunto de restrições que regerá o processo de negociação é que definirá os diversos conceitos de solução para um jogo cooperativo.

Nesse processo de negociação ou barganha, uma imputação x pode naturalmente não satisfazer algum participante k ; nesse caso diz-se que o participante k tem uma objeção àquela imputação x . Formalmente, um jogador k , $k \in K \subset I$, tem uma objeção (y, K) à imputação x se

$$(8) y_i > x_i, \text{ para todo } i \in K, \text{ e}$$

$$(9) y(K) \leq v(K)$$

As propriedades (8) e (9) são as mesmas propriedades que compõem a relação que chamamos de dominância. Portanto, se as propriedades (8) e (9) ocorrem simultaneamente, pode-se também dizer que y domina x , ou x é dominada por y , via coalizão K . Nesse processo, outra situação pode ocorrer: os indivíduos que não entraram na coalizão K podem reagir e formar ou ameaçar formar uma outra coalizão L em contraposição à coalizão K . Nesse caso, diz-se que o jogador $l \in K^C$, sendo K^C o conjunto complementar do conjunto K , tem uma contra-objeção (z, L) , $l \in L$, à (y, K) de k , $k \in K$, se

$$(10) z_i \geq x_i, \text{ para todo } i \in L / K$$

$$(11) z_i \geq y_i, \text{ para todo } i \in L \cap K$$

$$(12) z(L) \leq v(L)$$

Observe-se que tanto o indivíduo l quanto o indivíduo k estavam na imputação original x . Então, o indivíduo k , descontente com seus benefícios na imputação original x , resolve fazer ou ameaçar fazer uma coalizão K , deixando o indivíduo l de fora. O indivíduo l , que ficou de fora, não tem mais a garantia de receber o que receberia na imputação x . Para proteger seu ganho em x , resolve fazer uma ameaça, isto é, ele

informa ao indivíduo k que se este resolver montar a coalizão K , ele, o indivíduo l , tem condições concretas para montar uma outra coalizão L , desmontando assim a coalizão K , deixando de fora o indivíduo k e garantindo no mínimo o valor x , que ele tinha garantido na imputação original x , que o indivíduo k ameaça desfazer.

Uma objeção faz sentido, ou se diz que se justifica, quando não existe nenhuma contra-objeção a ela. Dados os conceitos de imputação, objeção, contra-objeção e objeção justificada, pode-se então caracterizar os principais conceitos de solução para o jogo cooperativo: o núcleo, o conjunto-negociação, o conjunto-solução, o nucléolo e o Valor de Shapley.

O núcleo, representado por $\text{Ker}(v)$, é definido como o conjunto de todas imputações não dominadas via nenhuma coalizão, ou o conjunto daquelas para as quais não existem objeções. Nesse caso escolhe-se a(s) solução(ões) eliminando no curso da negociação as imputações para as quais foi apresentada alguma objeção. Formalmente o núcleo pode ser representado pelo conjunto de todas imputações x tais que

$$(13) \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \forall S \subset I$$

A expressão matemática acima garante que se qualquer grupo de indivíduos S , que faça parte do conjunto de indivíduos que compõem o jogo, resolver fazer uma coalizão, nunca obterá um valor maior do que a soma dos ganhos individuais que ele obtém na imputação x . Qualquer imputação pertencente ao núcleo é estável, no sentido de que não existe nenhuma coalizão que possua simultaneamente o estímulo e o poder de mudar o resultado do jogo (HEIN, 2004a).

O núcleo pode ser apresentado de outra forma. Seja $e(x, K) = v(K) - x(K)$ a reclamação dos membros da coalizão K em relação à imputação x . Pode-se então expressá-lo como o conjunto de todas as imputações (HEIN, 2004b) contra as quais não possam existir máximas máximas reclamações que não sejam menores ou iguais a zero, isto é:

$$(14) \text{Ker}(v) = \{x \in X(v) / \max_{K \subset I} e(x, K) \leq 0\}$$

O conjunto-negociação constitui a união entre o conjunto das imputações que não possuem objeções e o conjunto das imputações que possuem objeções, porém, não justificadas. Mais precisamente, constitui o conjunto das imputações que restam quando no processo de negociação uma imputação só é eliminada quando tem uma objeção e essa objeção é justificada (OWEN, 1968, p. 188).

Dada essa definição, fica claro que o conjunto-negociação deve conter o núcleo se este existir. E, se o núcleo não existir, ainda tem-se a possibilidade de encontrar solução por meio do conjunto-negociação.

O conjunto-solução de von Neumann-Morgenstern, $NM(v)$, é representado pelo conjunto de imputações que satisfazem simultaneamente duas condições: (1) para quaisquer duas imputações pertencentes ao conjunto $NM(v)$, uma não pode ser dominada pela outra; (2) qualquer imputação que não pertença ao conjunto $NM(v)$ deve ser dominada por alguma imputação pertencente ao conjunto $NM(v)$, (von NEUMANN; MORGENSTERN, 1972).

Uma das principais dificuldades de se utilizar o conceito de solução de Neumann & Morgenstern é que nem a existência e nem a unicidade são garantidas. Nenhuma prova geral da existência do conjunto-estável foi feita até agora (OWEN, 1968).

O Núcleo, $Nu(v)$, constitui um critério que seleciona as imputações de forma a minimizar a máxima queixa ou reclamação que qualquer coalizão possa ter contra elas.

O procedimento para se encontrar o núcleo, $Nu(v)$, o que significa aplicar o princípio minimax, exige que façamos uma comparação entre as diversas imputações, de forma a encontrar aquela cuja máxima reclamação associada a ela seja menor do que a máxima queixa associada a qualquer outra imputação. Para isso, ordenam-se as 2^n coalizões contidas em I (incluindo o subconjunto N contendo todos elementos de I e o conjunto vazio ϕ) K_1, K_2, \dots, K_{2^n} e se constrói uma função $\theta(x)$, tal que:

$$(15) \theta(x) = (\theta_1(x), \theta_2(x), \dots, \theta_{2^n}(x)) \in \mathfrak{R}^{2^n};$$

$$(16) \theta_j(x) = e(x, K_j) \text{ e}$$

$$(17) \theta_j(x) > \theta_{j+1}(x) \text{ para } j = 1, 2, \dots, 2^{n-1}.$$

Dadas duas imputações x e x' , os vetores de queixas associados respectivamente a $\theta(x)$ e $\theta(x')$ podem ser comparados depois de ordenados lexicograficamente. Desta forma, pode-se dizer que $\theta(x)$ é lexicograficamente menor que $\theta(x')$ se $\theta_1(x) < \theta_1(x')$ ou $\theta_1(x) = \theta_1(x')$, para $i = 1, \dots, j-1$ e $j > 1$. Essa relação pode ser representada por $\theta(x) \leq_L \theta(x')$. Se $\theta_j(x) = \theta_j(x')$ para todo j , então $\theta(x) =_L \theta(x')$, e $\theta(x) \leq_L \theta(x')$, significa que $\theta(x) <_L \theta(x')$ $\theta(x) =_L \theta(x')$. Portanto, para um conjunto $X(v)$, o núcleo pode ser definido como:

$$(18) Nu(v) = \{x \in X \mid x' \in X(v) \rightarrow \theta(x) \leq_L \theta(x')\}.$$

Isto é, o núcleo do jogo v consiste de todas aquelas imputações x e $X(v)$ que possuem as menores queixas, lexicograficamente, associadas a elas. Dessa forma o núcleo acaba se constituindo numa forma de tornar o menor possível o protesto da coalizão mais descontente.

A importância do núcleo é que se $X(v)$ é compacto o $Nu(v)$ não é vazio; se $X(v)$ for compacto e convexo, o $Nu(v)$ será constituído de um único elemento; e se o núcleo

não for vazio, o nucléolo será um subconjunto do núcleo (MOULIN, 1981). Uma solução para problemas contínuos foi proposta por Kohlberg ao demonstrar que é possível, em algumas situações, calcular o núcleo como a solução de um problema de programação linear (KOHLBERG, 1972a, b).

O Valor de Shapley apresentado em 1953, no texto “*A value for n persons games da obra “Contributions to the Theory of Games”* organizada por H. W. Kuhn e A. W. Tucker (LUCE; RAIFFA, 1957). Esse conceito de solução constitui um critério que distribui para cada participante do conjunto I , um valor $\Phi(v)$ baseado em quatro axiomas:

1. produz uma distribuição exaustiva do valor total da grande coalizão, isto é,

$$\sum_{i \in I} \Phi_i(v) = v(I)$$

2. se um jogador i não adiciona nada mais que $v(\{i\})$ a nenhuma coalizão, ele recebe somente $v(\{i\})$, isto é, $\Phi_i(v) = v(\{i\})$.

3. se dois jogos são idênticos, exceto quanto à ordem na qual os seus jogadores estão listados, o valor de Shapley para os jogadores é o mesmo.

4. se um jogo é formado pela adição de dois outros jogos, o valor de Shapley para o novo jogo será a soma dos valores de Shapley dos jogos iniciais.

Pode-se demonstrar (OWEN, 1968) que existe uma e somente uma função que preenche as condições estabelecidas pelos axiomas citados acima. E ela atribui a cada participante i do jogo um ganho ou valor dado por:

$$(19) \Phi_i(v) = \sum_{K \ni i} \frac{(n-k)!(k-1)!}{n!} [v(K) - v(K/\{i\})]$$

onde k representa o número de indivíduos que compõem a coalizão K .

A expressão de $\Phi_i(v)$, o valor que cada indivíduo recebe mediante essa forma de redistribuição, sugere uma interpretação probabilística, na qual $[v(K) - v(K/\{i\})]$ exprime a contribuição marginal do jogador i ao valor da coalizão K e $\frac{(n-k)!(k-1)!}{n!}$

a probabilidade de que no processo aleatório de formação da grande coalizão 1 , o indivíduo i seja o jogador acrescentado à coalizão consistindo, ou que consistia, dos primeiros $k-1$ jogadores naquela ordem aleatória. O ganho de cada jogador pode ser visto como média ponderada das contribuições que o jogador fornece a cada coalizão que ele participa, onde os pesos seriam valores que dependem do total de jogadores n e do número deles em cada coalizão K , ou seja, k . O valor de Shapley pode ainda ser interpretado como um critério que atribui a cada participante do jogo a sua contribuição marginal esperada.

A fórmula do valor de Shapley pode ser deduzida diretamente por meio da interpretação probabilística dada acima. Suponha que os n jogadores combinem de encontrar-se em um determinado lugar em uma determinada hora. Devido à aleatoriedade, eles chegarão em momentos diferentes no tempo. Suponha também que as ordens de chegada (o número de permutações de n jogadores) têm a mesma probabilidade, isto é, $1/n!$. Considerando que se um jogador i quando chega já encontra os membros da coalizão $[K - \{i\}]$ ele recebe a quantia $[v(K) - v(K \setminus \{i\})]$, ou seja o valor marginal como o qual ele contribui para aquela coalizão. Logo, o valor de Shapley será o valor esperado de ganho do jogador i sob esse esquema aleatório.

Outra maneira análoga de se deduzir a mesma fórmula seria imaginarmos um evento A , que fosse definido como: $A = \{\text{escolher o jogador } i \text{ pertencente obrigatoriamente à coalizão de } k \text{ elementos}\}$ e um evento B , onde fosse definido como $B = \{\text{escolher os outros } k-1 \text{ elementos da coalizão entre os } n-1 \text{ jogadores restantes}\}$. A probabilidade dos eventos A e B ocorrerem simultaneamente seria:

$$P(A \cap B) = P(B/A)P(A) = \frac{1}{\binom{n-1}{k-1}} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{(k-1) \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!}} \times \frac{1}{n} = \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}, \text{ da} \quad (20)$$

qual se deduz o valor esperado para cada jogador como:

$$(21) \Phi_i(v) = \sum_{K=1}^n \frac{(n-k)!(k-1)!}{n!} [v(K) - v(K \setminus \{i\})]$$

Para finalizar, observe-se que o valor de Shapley, $\Phi_i(v)$ é uma imputação, dado que:

$$(22) \sum_{i \in I} \Phi_i(v) = v(I), \text{ e}$$

$$(23) \Phi_i(v) \geq v(\{i\}), \forall i \in I.$$

4 APLICAÇÃO DA TEORIA DOS JOGOS À DISTRIBUIÇÃO DE CUSTO CONJUNTO

Empresas de uma corporação industrial, cooperativas, aeronaves que utilizam um mesmo campo de aviação, ou indivíduos que têm interesse em desempenhar atividades em conjunto, por exemplo, defrontam-se em geral com a questão de distribuição de custos conjuntos. A “contabilidade tradicional” sugere várias maneiras ratear custos (LEONE, 2000; ATKINSON, 2000; SHANK e GOVINDARAJAN, 1997; JIAMBALVO, 2001; MARTINS, 2003). No entanto, todas essas maneiras apresentam arbitrariedades e só são aceitas pelas partes envolvidas quando estas estão submetidas a um poder

central que as impõe. Isto é, todos esses métodos só podem ser aceitos, em geral, quando as partes não possuem a possibilidade de atuar sozinhas ou por meio de coalizões.

A imposição desses critérios de rateio às vezes é feita pelo governo ou por uma autoridade central que comanda as partes envolvidas. Contudo, a questão assume outro aspecto quando não existe um poder centralizado, de forma que as partes, livres para aceitar ou não um determinado critério de rateio, podem inviabilizar um determinado projeto e, conseqüentemente, promover situações desastrosas, não só para o grupo como para o resto da sociedade.

Supondo, por exemplo, que uma atividade possa ser desenvolvida por indivíduos isolados ou por uma coalizão desses indivíduos. Se a atividade for realizada isoladamente por cada indivíduo, estes incorreram em um custo particular. Se for desempenhada por um grupo, ou pela comunidade como um todo, haverá um ganho de escala que reduzirá consideravelmente o custo total, ou seja, o custo total será consideravelmente menor que a soma de todos os custos individuais se os agentes atuassem isoladamente. O problema com o qual se depara é: como distribuir o ganho de escala entre os agentes que participaram, em conjunto, dessa atividade? Em outras palavras, como distribuir o custo conjunto, dado que não existe uma forma objetiva, direta e portanto inquestionável de se ratear o custo total entre os participantes do projeto?

Uma ilustração do problema pode ser feita mediante o exemplo da construção de barragens que podem ser construídas para atender a vários objetivos. Supondo por exemplo que o custo da construção de uma barragem com o propósito de fornecer água para irrigação seja de 10 bilhões de reais, enquanto o custo de uma barragem para a contenção de enchentes é de 8 bilhões de reais. Pode-se construir uma barragem que atenda a ambos os propósitos por 15 bilhões de reais. Nesse caso existe um ganho de 3 bilhões de reais se a barragem for construída conjuntamente, e esse benefício deve ser distribuído entre os participantes do empreendimento mediante o rateio do custo total de 15 bilhões de reais. Como existem apenas dois participantes, a questão torna-se bem simples. Basta que, como condição necessária, os custos sejam distribuídos de forma que nenhum participante se sinta subsidiando o outro. Isto é, a distribuição de custos não pode impor que um agente subsidie o outro. Formalmente, se denominarmos de $C(\{i\})$, $i = 1, 2$, o custo de construção da barragem para atender o objetivo do agente i e $R(\{i\})$ a sua respectiva contribuição, a condição para que não haja imposição de subsídio será então:

$$(25) R(\{i\}) \leq C(\{i\}) \quad i = 1, 2.$$

A questão torna-se simples quando envolve apenas dois agentes, porque, nesse caso, só existe uma possibilidade de coalizão, ou seja, a coalizão dos dois agentes. Quando existem mais de dois agentes, a possibilidade de coalizões obviamente aumenta e pode ocorrer que a condição posta acima não baste como mínimo necessário para que a distribuição de custo seja aceitável pelos envolvidos. Nesse caso, deve-se levar em conta não só os agentes, mas as suas possíveis coalizões. Conseqüentemente, para que nenhum agente ou coalizão se sinta subsidiando alguém, torna-se necessário que a distribuição de custos satisfaça a seguinte condição:

$$(26) R(S) \leq C(S), \text{ onde } P(S) = \sum_{i \in S} R(\{i\}) \text{ para todo } S \subseteq I,$$

onde I é o conjunto de todos os participantes e S representa qualquer coalizão em I , incluindo tanto o próprio I como qualquer “coalizão” de um único elemento.

Na forma em que foi posta a questão podemos facilmente transportá-la para a Teoria dos Jogos. Assim, a distribuição de custo entre os agentes pode ser feita caracterizando a questão como um jogo cooperativo com pagamentos colaterais. A função de custo determina a função característica de um “jogo de distribuição de custos” subaditiva, em vez de superaditiva, enquanto o vetor de receitas, ou contribuições, representa o vetor de resultados. Se o vetor de resultados pode ser representado como:

$$(27) \sum_{i \in S} R(\{i\}) = C(I).$$

então pode ser visto como uma imputação. Se este vetor de resultado além de atender a condição (27) satisfaz também a condição (26) então ele se encaixa perfeitamente no conceito de núcleo, dado que nenhuma destas imputações pode ser bloqueada por nenhuma coalizão de jogadores, no sentido de que seria mais vantajoso (ou menos custoso) contribuir com $R(S)$ do que construir a barragem através da coalizão S , a qual teria um custo $C(S) \geq R(S)$.

Supondo agora que uma barragem possa ser construída para três objetivos diferentes: produção de energia elétrica, controle de enchentes e irrigação. Tem-se agora 3 agentes indexados de acordo com seus interesses: $i=1$ representa o agente interessado na produção de energia elétrica; $i=2$, o agente interessado no controle de enchentes; e $i=3$, o agente interessado na contenção de água para irrigação. Suponhamos que o custo de construção da barragem para a produção de energia elétrica seja $C(\{1\})=10$ bilhões de reais; para o controle de enchentes seja $C(\{2\})=8$ bilhões de reais; e para a contenção de água para irrigação $C(\{3\})=7$ bilhões de reais. No entanto, os agentes podem coligar-se livremente para a construção da barragem. Nesse caso, supondo que o custo da construção para atender simultaneamente à produção de energia elétrica e ao controle de enchentes seja $C(\{1,2\})=15$ bilhões de reais; para atender à produção de energia e à irrigação seja $C(\{1,3\})=14$ bilhões de reais; para atender ao controle de enchentes e a irrigação seja $C(\{2,3\})=16$ bilhões de reais; e, finalmente, para atender aos três objetivos seja $C(\{1,2,3\})=20$ bilhões de reais. Qual deverá ser a distribuição de custos entre os 3 agentes para que construam uma só barragem para atender conjuntamente aos três objetivos, dado que dessa forma teriam um ganho de 5 bilhões de reais em relação ao custo que teriam se as barragem fossem construídas individualmente?

A questão se resume em encontrar o núcleo do jogo cooperativo caracterizado pela situação. Portanto, bastaria encontrar um conjunto de imputações que não sejam dominadas via nenhuma outra coalizão. Ou seja, basta encontrarmos uma distribuição de custos definida pelos valores R_i , $i = 1,2,3$, tais que:

$$(28) \sum R_i = C(\{1,2,3\}) \text{ e}$$

$$(29) \quad C(S) \leq C(S), \quad S \subseteq \{1, 2, 3\}.$$

Para tanto bastaria elaborar um programa de computação que determinasse os valores de R_1 , R_2 , e R_3 tais que:

$$(30) \quad R_1 \leq 10$$

$$(31) \quad R_2 \leq 8$$

$$(32) \quad R_3 \leq 7$$

$$(33) \quad R_1 + R_2 \leq 15$$

$$(34) \quad R_1 + R_3 \leq 14$$

$$(35) \quad R_2 + R_3 \leq 16$$

$$(36) \quad R_1 + R_2 + R_3 = 20.$$

Supondo que a distribuição de custos se faça apenas em forma de números inteiros teríamos um núcleo de nove elementos, ou seja: (5, 8, 7), (6, 8, 6), (6, 7, 7), (7, 8, 5), (7, 7, 6), (7, 6, 7), (8, 7, 5), (8, 6, 6), (9, 6, 5). Estas seriam as possíveis distribuições de custos de forma a que a barragem pudesse ser construída para atender aos três objetivos em conjunto e sem que houvesse subsídios cruzados. Porém, como existe mais de uma distribuição possível do custo total, poder-se-ia aplicar tanto o conceito de solução chamado nucléolo como o valor de Shapley para auxiliar a busca de uma solução única.

O nucléolo não daria uma distribuição pertencente ao núcleo de forma a minimizar as queixas de qualquer outra coalizão contra ela. Aplicando o processo de maximização lexicográfica encontra-se o nucléolo igual a (7, 7, 6). Aplicando o conceito de valor de Shapley, em que, implicitamente, se considera o resultado como uma distribuição “justa”, dado que cada agente recebe o valor esperado de sua contribuição marginal, encontra-se o mesmo vetor (7, 7, 6). Portanto, uma razoável proposta de distribuição de custo para esta questão hipotética deve ser (7, 7, 6), porque ela está no núcleo; representa no núcleo a distribuição que minimiza as reclamações das outras possíveis coalizões; e diz respeito a uma distribuição na qual cada agente é sobrecarregado proporcionalmente à sua contribuição ao ganho de 5 bilhões de reais na construção da barragem para atender aos três objetivos em conjunto.

Não existe obviamente forma de se obrigar os agentes a aceitarem qualquer distribuição contida no núcleo. Mas todos preferem estas a qualquer outra alternativa. A

distribuição (7, 7, 6) pode ser usada pelo mediador da questão, que por sua vez pode usar simultaneamente, como forma de persuasão, o conceito de nucléolo e o do valor de Shapley.

Uma outra aplicação muito evidenciada na literatura foi proposta por Martin Shubick (1962). A “contabilidade” apresenta vários critérios de rateio de custos conjuntos e todos eles são criticados por Shubick pelo fato de não apresentarem formas descentralizadas de incentivos, aos diversos centros de produção ou departamentos de uma corporação, para a inovação.

Segundo Shubick (1962), o objetivo de uma boa gerência seria projetar um sistema de premiação para aqueles que assumem riscos no processo de tomada de decisão, de tal maneira que os prêmios individuais tenham uma correlação positiva com o valor do resultado da decisão para a organização. Em uma corporação, se o poder de decisão deve ser delegado, é preferível termos uma organização projetada para encorajar a iniciativa dos centros de decisão. Uma forma de promover isso será termos uma estrutura de premiação projetada de forma que a seleção das melhores opções para o tomador de decisão individual coincida sempre com aquelas que são melhores para a organização como um todo. Este requisito não está garantido pelos métodos convencionais de distribuição de custo conjunto oferecidos pela “contabilidade”. Por exemplo: a gerência de uma fábrica pode muito bem ter conhecimento de uma mudança, que por sua vez pode ter o efeito de aumentar o lucro da corporação, no entanto, a decisão implica em diminuir o tamanho de sua fábrica e reduzir o lucro a ela atribuído pelo sistema contábil. Se o seu êxito e sua renda são determinados pelos lucros contábeis atribuídos à sua fábrica, ou seu departamento, provavelmente ela, contraditoriamente, não estará interessada em tomar essa decisão.

A lucratividade de uma corporação pode ser vista como dependente da soma dos lucros conjuntos que, por seu turno, podem ser obtidos pela coordenação ótima de todas as unidades, por exemplo, fábricas, departamentos, etc. E, como existe um custo administrativo, que é um custo conjunto, ele deve ser rateado entre todos os centros de decisão, de forma que o interesse privado de cada centro de decisão coincida com o interesse da organização. Esta situação configura um jogo cooperativo cujos agentes são os centros de decisão que compõem a corporação.

Um problema semelhante se verifica quanto às empresas, quando adotam conjuntamente investimentos que têm efeito sinérgico produzindo uma receita líquida maior. A alocação dos custos financeiros, nesses casos, é em geral arbitrária. Callen (1978) mostra como o conceito de valor de Shapley pode ser utilizado para a distribuição de custos financeiros de projetos interdependentes, de forma mais consistente.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apesar dos curtos períodos de estagnação, a Teoria dos Jogos nunca deixou de progredir. Sua história mostra um processo contínuo de desenvolvimento de novos conceitos e técnicas. Há momentos, no entanto, em que sua evolução e especialização atingem um estágio no qual, aparentemente, se rompe o elo entre conceito e realidade. O alto grau de abstração, necessário para a formulação dos novos conceitos e para compreensão das novas técnicas, pode fazer com que essa metodologia, que mantém íntima relação com o comportamento humano, venha ser erroneamente encarada como mera abstração, sem nenhuma ligação com o mundo real. A sistematização aqui apresentada adquire importância não somente por reunir os conceitos fundamentais, dos quais derivam todos os conceitos modernos, mas também porque, ao expor tais conceitos básicos, permite a pronta visualização do limite existente entre a teoria e a prática. Em outras palavras, esta sistematização põe em relevo o pressuposto em que se alicerça essa metodologia: o de que os homens estabelecem relações visando a satisfação de seus interesses.

REFERÊNCIAS

- ARROW, K. J. (1965): **Social choice and individual values**. Wiley, New York.
- ATKINSON, A., BANKER, R.D., KAPLAN, R.S., YOUNG S.M. (2000): **Contabilidade gerencial**. São Paulo: Atlas.
- CALLEN, J. L. (1978): Financial cost allocations: a game-theoretic approach. **The Account Review** - v. LIII - n. 2 - April.
- D'ASPREMONT, C., GABSZEWICZ, J.J., THISSE, J.F. (1979): On Hotelling's Stability in Competition. In. **Econometrica** 47 - pgs. 1145, 1150.
- FARREL, J. MASKIN, E. (1989): **Renegotiation in repeated games**. Games and Economic Behavior, 1(4), Dec.
- FIGUEIREDO, R. (1993): **A modelagem do conflito e a teoria dos jogos: fundamentos econômicos e desdobramentos filosóficos**. Tese de doutorado. IEI/UFRJ.
- FRIEDMAN, J. W. (1977): **Oligopoly and the theory of games**. North-Holland.
- FUDENBERG, D. TIROLE, J. (1991): Perfect bayesian equilibrium and sequential equilibrium. **Journal of Economic Theory** – 53 – pgs. 236, 260.
- GIBBARD, A. (1973): **Manipulation of voting schemes: a general result**, *econometrica* – 41- pgs. 587, 601.
- GREEN, E., PORTER, R. (1984): Non-Cooperative collusion under imperfect information. In. **Econometrica** 52 - pgs. 87,100.
- HEIN, N.; HORNER, Douglas ; RAUTENBERG, Robson Raulino. (2004b) Equilíbrio de Nash: algumas considerações. In: Jornadas Argentinas de Informática e Investigación Operativa – 2004b. Córdoba. **Anais...** XXV Simposio Argentino de Investigación Operativa.
- HEIN, N.; HORNER, Douglas ; RAUTENBERG, Robson Raulino. (2004a) Teoria dos jogos simultâneos e sequenciais. In: Jornadas Argentinas de Informática e Investigación Operativa, 2004, Córdoba. **Anais...** XXV Simposio Argentino de Investigación Operativa.
- HELLWIG, M. (1986): **Some recent developments in the theory of competition in markets**, mimeo, Universität Bonn.
- HURVICZ, L. (1973): The Design of mechanisms for resource allocation. **American Economic Review** - v. 63 – n.2 – May.
- JACQUEMIN, A. (1987): **The new industrial organization**. MIT Press.
- JIAMBALVO, James. (2001): **Contabilidade gerencial**. Rio de Janeiro: LTC.
- KOHLBERG, E. (1972b): **On the nucleolus of a characteristic function game**. SIAM J. Appl. Math - v. 20 - n. 1 - Jan.

- KOHLBERG, E. (1972a): **The nucleolus as a solution of a minimization problem.** SIAM J. Appl. Math - v. 23 – n. 1 - Julho.
- KREPS, D. (1990): **A course in microeconomic theory.** Princeton University Press.
- LEONE, G.S.G. (2000): **Custos: planejamento, implantação e controle.** São Paulo: Atlas.
- LUCE, R. D.; RAIFFA, H. (1975): **Games and decisions.** Wiley & Sons, New York.
- MARTINS, Eliseu. (2003): **Contabilidade de custos.** 9. ed. São Paulo: Atlas.
- MORENO, D., WOODERS, J. (1996): **Coalition-Proof Equilibrium**, mimeo, MIT.
- MOULIN, Herve. (1981): The proportional veto principle, **Review of Economic Studies.** Blackwell Publishing - vol. 48(3) – pgs. 407, 416 - July.
- NASH, J. F. (1951): Non-cooperative games. **Annals of Mathematics** - n. 54.
- OWEN, G. (1968): **Game theory.** Saunders - Philadelphia.
- SATTERTHWAITE, M. A. (1975): Strategy-proofness and arrows's conditions: existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions. **Journal Economic Theory** – April - 10(2), pgs. 187, 217.
- SCHOTTER, A. SCHWODIAUER, G. (1980): Economics and theory of games. **Journal of Economic Literature** - v. XVIII - Jun.
- SHANK, J.K., GOVINDARAJAN, V. (1997): **A revolução dos custos.** Rio de Janeiro: Campus.
- SHUBIK, M. (1987): **Game theory in social sciences.** MIT Press, Massachusetts.
- SHUBIK, M. (1962): **Incentives, decentralized control, the assignnient of joint cost and internal price.** Management Science - v. 8 - n. 2 - April.
- TIROLE, J. (1988): **The theory of industrial organization.** MIT Press, Cambridge.
- von NEUMANN, J.; MORGENSTERN, O. (1972): **Theory of games and economic behavior.** Princeton University Press - Princeton.